第二章　報價通貨選擇理論

第一節　前　　言

本章所要建立的理論架構，雖然只是Baron（1976a）模型的延展，但我們却能藉此而指明了影響出口商選擇報價通貨的關鍵因素，進而得到幾項決定出口商報價策略的基本準則。就此而言，本章的模型，或許有助於現有的報價通貨選擇理論的一般化。

在下一節裏，我們將分別討論出口商以外幣報價時及以國幣報價時的利潤風險。第三節將依出口商的風險態度設定效用函數，藉以探討他們在不同報價策略下的最適行爲。第四節擬比較出口商兩種報價方式的預期效用水準，進而指出報價通貨抉擇的決定因素。至於一些概括性的補充說明，則將列於第五節。

第二節　滙率風險、報價通貨、及出口商的利潤

本節旨在探討，於不同的報價策略下，滙率風險如何影響出口商的利潤。

首先，讓我們討論出口商選用外幣（進口國的通貨）報價的情形。跟Baron（1976a）一樣，我們假定「廠商的產品只供出口，而不售與國內的市場」（頁428）〔註一〕，並假設出口商生產的成本函數及其所面臨的國外需求函數分別如下〔註二〕：

$$C = \alpha q + \beta q^2 \qquad (2\text{-}1)$$

$$p^* = a - bq \qquad (2\text{-}2)$$

式中C代表以國幣（出口國的通貨）表示的總成本，p^*代表出口品的外幣價格，q代表生產（銷售）量，並設a、b、α、β爲常數，而$ae > \alpha > 0$，$b > 0$，$\beta \geq$

$-\alpha b/a$ 〔註三〕 ，e 代表滙率（即每單位外幣的國幣價格），爲隨機變數。據此，我們可以把出口商的利潤（以國幣表示）寫如下式：

$$\pi_1 = ep^*q(p^*) - C(q(p^*)) = ep^*q - \alpha q - \beta q^2 \tag{2-3}$$

式中下標「1」表示第一種報價的策略——外幣報價。

該式清楚地指出，在滙率不確定的假設下，出口商的利潤也會跟着不確定。這是因爲「國幣相對於外幣的比價，若出其不意的急速上升（即指滙率下跌），則在出口品的外幣價格沒有足夠提高而予抵銷的情況下，勢必減少以國幣衡量的出口值，從而降低銷售利潤。反之，則勢將增加出口的國幣值，並提高出口利潤」〔Kawai (1981), 頁46〕。準此，我們可依式 (2-3) 求算出口利潤的期望值（μ_{π_1}）及變異數（$\sigma^2_{\pi_1}$）分別如下：

$$\mu_{\pi_1} = \mu p^* q - \alpha q - \beta q^2 \tag{2-4}$$

$$\sigma^2_{\pi_1} = p^{*2} q^2 \sigma^2 \tag{2-5}$$

式中 μ 和 σ^2 分別代表滙率的期望值及變異數，即

$$\mu \equiv E[e], \quad \sigma^2 \equiv Var(e) \tag{2-6}$$

現在我們再看看出口商以國幣報價的情形。令 p 代表出口品的國幣價格，則 p/e 即代表買方（進口國）支付的有效價格（effective price）。我們依循 Baron（1976a）的途徑，把國外的需求函數寫成下列的形式：

$$q = \frac{a}{b} - \left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{p}{e}\right) \tag{2-7}$$

上式明白地告訴我們，即使出口商用國幣報價，仍然不能免除風險〔註四〕。這是由於有效價格（p/e）因滙率變動而不確定的緣故。據此就出口商來看，需要量(q)也隨之無法確定了〔Baron (1976a),頁431〕。果爾，出口商以國幣表示的利潤，也就變成隨機變數：

$$\pi_2 = pq\left(\frac{p}{e}\right) - C\left(q\left(\frac{p}{e}\right)\right) = pq - \alpha q - \beta q^2 \tag{2-8}$$

式中下標「2」表示第二種報價的策略——國幣報價。

根據(2-7)、(2-8)兩式，我們不難求出以國幣報價時利潤的期望值(μ_{π_2})及變異數($\sigma^2_{\pi_2}$)分別是

$$\mu_{\pi_2} = (p-\alpha)(\frac{a}{b}-\frac{p\mu'}{b}) - \beta(\frac{a}{b}-\frac{p\mu'}{b})^2 - \beta\frac{p^2\sigma'^2}{b^2} \tag{2-9}$$

$$\sigma^2_{\pi_2} = \frac{p^2\sigma'^2}{b^2}\{([1+(\frac{\beta}{b})(2\mu'+\alpha'_3\sigma')]p - [\alpha+2a(\frac{\beta}{b})])^2 + p^2\sigma'^2(\frac{\beta}{b})^2(\alpha'_4-1-\alpha'^2_3)\} \tag{2-10}$$

式中

$\mu' \equiv E[\frac{1}{e}] = \frac{1}{e}$ 分配的期望值

$\sigma'^2 \equiv Var(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$ 分配的變異數

$\alpha'_3 \equiv \frac{1}{\sigma'^3}E[(\frac{1}{e}-\mu')^3] = \frac{1}{e}$ 分配的偏度(skewness)

$\alpha'_4 \equiv \frac{1}{\sigma'^4}E[(\frac{1}{e}-\mu')^4] = \frac{1}{e}$ 分配的峰度(kurtosis)

從以上的分析，我們已經知道，無論出口商選用外幣報價抑或國幣報價，都會因滙率的機遇性變動(stochastic changes in exchange rates)而遭受利潤不確定的風險。但隨著報價策略的不同，滙率風險影響利潤的途徑也互有差異。當出口商採用外幣報價時，滙率的升降只是牽動國幣收入的增減，從而使其利潤不確定〔見式(2-3)〕;當他選取國幣報價時，滙率的波動則透過有效價格左右產銷數量，進而使廠商的收入與成本都變成隨機變數，因此利潤也隨之不確定〔見式(2-8)〕。不過，如果滙率不再是隨機變數(即設 $\sigma=\sigma'=0$，因此 $\mu'=1/\mu$)，則兩種報價策略下的利潤勢將一致，而所謂利潤不確定的問題也就不復存在了

〔註五〕。

第三節　出口商的最適行爲

上節我們已經分別討論，在外幣報價及國幣報價之下，滙率風險如何導致利潤的不確定。由於這種不確定性的存在，我們勢須假定出口商的目標是追求預期效用之極大，而不是利潤之極大。因此，本節將從出口商的效用函數出發，推導其預期效用函數，並據以分析出口商於不同報價策略時的極大化行爲。

假定出口商的效用（U）是利潤（π）的函數：

$$U = U(\pi) \tag{2-11}$$

式中設$U(\pi)$是可微分而有界的函數（ differentiable and bounded function ）〔註六〕，且滿足 von Neumann-Morgensten 效用理論的公理〔註七〕，並設

$$U'(\pi) = \text{利潤的邊際效用} > 0 \tag{2-12}$$

$$U''(\pi) \begin{cases} < 0 \text{ 當} U \text{是嚴格凹性函數（ strictly concave function ）} \\ = 0 \text{ 當} U \text{是線性函數（ linear function ）〔註八〕} \end{cases} \tag{2-13}$$

根據式（2-11）及「確定性等值」（ certainty-equivalence ）的概念，我們推得下列的關係〔註九〕：

$$E[U(\pi)] \propto \mu_\pi - \frac{f}{2}\sigma_\pi^2 \tag{2-14}$$

式中$E[U(\pi)]$代表出口商的預期效用，μ_π及σ_π^2分別代表利潤的期望值和變異數，而$f\,[= -U''(\mu_\pi)/U'(\mu_\pi)]$爲常數，可以當做出口商風險態度的指標。當$f = 0$時，表示出口商是風險中立者。如果$f > 0$，則表示出口商是風險袪避者。這時，$f$值越大，即代表出口商袪避風險的程度也越大。因此，我們不妨把f稱爲「風險袪避係數」（ coefficient of risk aversion ）〔註十〕。

現在，讓我們回過頭來檢討報價通貨抉擇的問題。我們知道，若要判定出口商何以選用外幣報價或國幣報價，就得比較兩種報價策略下的預期效用。前節說過，

在有滙率風險的情況下，出口商利潤的期望值及變異數，將因報價策略的差別而互異。果爾，其預期效用也會有所不同，我們先看選用外幣報價的情形。

假定出口商所關心的是：如何訂定 p^*，才能使他的預期效用達到極大，即

$$\underset{p^*}{\mathrm{Max}}\ E\left[U(\pi_1)\right] = \underset{p^*}{\mathrm{Max}}\left(\mu_{\pi_1} - \frac{f}{2}\sigma^2_{\pi_1}\right) \tag{2-15}$$

把（2-4）、（2-5）兩式代入上式，即得極大化的初階條件如下：

$$\frac{\partial E\left[U(\pi_1)\right]}{\partial p^*} = \frac{\partial \mu_{\pi_1}}{\partial p^*} - \frac{f}{2}\frac{\partial \sigma^2_{\pi_1}}{\partial p^*}$$

$$= a_3 p^{*3} + a_2 p^{*2} + a_1 p^* + a_0 = 0 \tag{2-16}$$

式中

$$a_3 = -\frac{2f\sigma^2}{b} < 0$$

$$a_2 = \frac{3f\sigma^2 a}{b} > 0$$

$$a_1 = -\left[\frac{f\sigma^2 a^2}{b} + 2\left(\mu + \frac{\beta}{b}\right)\right] < 0$$

$$a_0 = a\mu + \alpha + 2a\left(\frac{\beta}{b}\right) > 0$$

根據上式，我們求得風險中立者（即 $f = 0$）的最適外幣價格（$\tilde{p}^*$）爲

$$\tilde{p}^* = \frac{a\mu + \alpha + 2a(\beta / b)}{2(\mu + \beta / b)} \tag{2-17}$$

而風險袪避者（即 $f > 0$）的最適外幣價格（$\hat{p}^*$）則爲

$$\hat{p}^* = A + B - \frac{a_2}{3a_3} \quad \text{〔註十一〕} \tag{2-18}$$

式中

$$A=\{\frac{-s+(s^2+4t^3)^{1/2}}{2}\}^{1/3}$$

$$B=\{\frac{-s-(s^2+4t^3)^{1/2}}{2}\}^{1/3}$$

$$s=\frac{2a_2^3}{27a_3^3}-\frac{a_1a_2}{3a_3^2}+\frac{a_0}{a_3}$$

$$t=\frac{a_1}{3a_3}-\frac{a_2^2}{9a_3^2}$$

以式(2-17)代入式(2-4)，式(2-18)則代入(2-4)、(2-5)兩式，並將所得的結果代入式(2-15)，即得風險中立者及風險袪避者的預期效用極大值分別如下：

$$\begin{aligned}\text{Max } E[U(\pi_1)]_{f=0} &= E[U(\pi_1) \mid p^*=\tilde{p}^*]\\ &= \mu_{\pi_1}(p^*=\tilde{p}^*)\\ &= \frac{(\mu a-\alpha)^2}{4b(\mu+\beta/b)} \qquad (2\text{-}19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Max } E[U(\pi_1)]_{f>0} &= E[U(\pi_1) \mid p^*=\hat{p}^*]\\ &= h(f, \mu, \sigma^2, a, b, \alpha, \beta) \qquad (2\text{-}20)\end{aligned}$$

換句話說，廠商的風險態度（f）、市場的需求情況（a，b）、生產的成本條件（α，β）、與滙率的水準及其波動（μ，σ^2）等因素，都將左右出口商所訂定的最適價格，從而影響他的預期效用水準。於是，我們要進一步追問：上列這些因素的變動，會怎樣影響出口商的預期效用？而其影響的方向和程度是否隨著報價策略的變更而有所不同？

爲了回答上述的問題，我們必須檢討出口商選用國幣報價時的預期效用。我們仍假定出口商透過 p 的選定，求其預期效用之極大：

$$\underset{p}{\text{Max}}\ E\left[U(\pi_2)\right]=\underset{p}{\text{Max}}\left(\mu_{\pi_2}-\frac{f}{2}\sigma^2_{\pi_2}\right) \tag{2-21}$$

與外幣報價的情形一樣，我們不難求得極大化的初階條件如下：

$$\frac{\partial E\left[U(\pi_2)\right]}{\partial p}=\frac{\partial \mu_{\pi_2}}{\partial p}-\frac{f}{2}\frac{\partial \sigma^2_{\pi_2}}{\partial p}$$

$$=a'_3p^3+a'_2p^2+a'_1p+a'_0=0 \tag{2-22}$$

式中

$$a'_3=-\frac{2f\sigma'^2}{b}\left\{\left[1+\frac{\beta}{b}(2\mu'+\alpha'_3\sigma')\right]^2+\left(\frac{\beta}{b}\right)^2(\alpha'_4-\alpha'^2_3-1)\sigma'^2\right\}<0$$

$$a'_2=\frac{3f\sigma'^2}{b}\left[1+\frac{\beta}{b}(2\mu'+\alpha'_3\sigma')\right]\left[\alpha+2a\left(\frac{\beta}{b}\right)\right]>0$$

$$a'_1=-\left\{\frac{f\sigma'^2}{b}\left[\alpha+2a\left(\frac{\beta}{b}\right)\right]^2+2\left[\mu'+\frac{\beta}{b}(\mu'^2+\sigma'^2)\right]\right\}<0$$

$$a'_0=a+\alpha\mu'+2a\mu'\left(\frac{\beta}{b}\right)>0$$

從上式我們知道，風險中立者的最適國幣價格（$\tilde{p}$）爲

$$\tilde{p}=\frac{a+\alpha\mu'+2a\mu'(\beta/b)}{2\left[\mu'+(\beta/b)(\mu'^2+\sigma'^2)\right]} \tag{2-23}$$

而風險祛避者的最適國幣價格（$\hat{p}$）則爲

$$\hat{p}=A'+B'-\frac{a'_2}{3a'_3} \quad \text{〔註十二〕} \tag{2-24}$$

式中

$$A'=\left\{\frac{-s+(s^2+4t^3)^{1/2}}{2}\right\}^{1/3}$$

$$B' = \{\frac{-s-(s^2+4t^3)^{1/2}}{2}\}^{1/3}$$

$$s = \frac{2a_2'^3}{27a_3'^3} - \frac{a_1'a_2'}{3a_3'^2} + \frac{a_0'}{a_3'}$$

$$t = \frac{a_1'}{3a_3'} - \frac{a_2'^2}{9a_3'^2}$$

依照同樣的計算過程，我們把式(2-23)代入式(2-9)，而把式(2-24)代入(2-9)、(2-10)兩式，並以所得的結果代入式(2-21)，即可計算風險中立者及風險袪避者的預期效用極大值分別如下：

$$\begin{aligned}\text{Max } E[U(\pi_2)]_{f=0} &= E[U(\pi_2) \mid p=\tilde{p}] \\ &= \mu_{\pi_2}(p=\tilde{p}) \\ &= \frac{(a-\alpha\mu')^2 - 4a\sigma'^2(\beta/b)[\alpha+a(\beta/b)]}{4b[\mu'+(\beta/b)(\mu'^2+\sigma'^2)]}\end{aligned} \tag{2-25}$$

$$\begin{aligned}\text{Max } E[U(\pi_2)]_{f>0} &= E[U(\pi_2) \mid p=\hat{p}] \\ &= g(f, \mu', \sigma'^2, \alpha_3', \alpha_4', a, b, \alpha, \beta)\end{aligned} \tag{2-26}$$

上列兩式明白地告訴我們，以國幣報價的出口商，其預期效用水準也同樣受風險態度、產品供需情況、滙率水準及波動等因素的影響。但其影響的方向和程度與外幣報價的情形却未必一致。因此，我們實有進一步探討下列三個問題的必要。第一，在外幣報價與國幣報價下，出口商預期效用水準之比較。第二，產品的供需條件、出口商的風險態度、以及滙率的波動等參數，怎樣影響預期效用水準，進而影響報價通貨的抉擇。第三，這些參數對於預期效用的影響，如何隨報價策略的變更而不同。

第四節　預期效用水準的比較

本節的目的是要比較出口商採行不同報價策略時的預期效用水準，並據以探索他們選擇報價通貨的準則。

我們在第二節已經提及，如果滙率不是隨機變數，則無論出口商以國幣報價或外幣報價，其利潤都將確定而相等。換句話說，本章模型裡的不確定之源——滙率風險——一旦消失，那麼，對出口商來說，兩種報價策略應該是毫無差別的。Baron (1976 a) 就曾一針見血地指出：「在固定滙率之下，這兩種報價的策略全然相同。因爲外幣價格和國幣價格，透過固定的滙率便可簡單地換算」(頁 425)。實際上，Baron 所指的固定滙率，正是我們所謂沒有滙率風險的情形 (即設 $\sigma = \sigma' = 0$，從而 $\mu' = 1/\mu$)。

但前節說過，在有滙率風險的情況下，報價策略勢必影響廠商的預期效用水準。所以，「當滙率波動不定時，報價策略之抉擇就極其重要」〔Baron (1976a), 頁 425〕。那麼，滙率風險爲什麼會使出口商的效用因其報價策略不同而高低有別呢？箇中的原因固然很多，但是有一個重要的因素是不能忽視的，那便是出口商對於風險的態度。現在，就讓我們檢討出口商的風險態度與報價策略的關係。

爲了行文方便起見，我們不妨先令 D 代表在不同報價策略下的預期效用之差，並將其定義寫如下式：

$$D \equiv \text{Max } E[U(\pi_1)] - \text{Max } E[U(\pi_2)]$$

$$= D(f, \mu, \mu', \sigma^2, \sigma'^2, \alpha'_3, \alpha'_4, a, b, \alpha, \beta) \qquad (2\text{-}27)$$

則出口商選用外幣報價或國幣報價，端視 D 是正或負而定。如果出口商是風險中立者 (即 $f = 0$)，那麼，根據 (2-19) 及 (2-25) 兩式，即得

$$D = D(0;\cdots\cdots) \equiv \text{Max } E[U(\pi_1)]_{f=0} - \text{Max } E[U(\pi_2)]_{f=0}$$

$$= \mu_{\pi_1}(p^* = \tilde{p}^*) - \mu_{\pi_2}(p = \tilde{p})$$

$$=\frac{1}{4b}\left\{\frac{(\mu a-\alpha)^2}{\mu+\beta/b}-\frac{(a-\alpha\mu')^2-4(\beta/b)a\sigma'^2[\alpha+a(\beta/b)]}{\mu'+(\beta+b)(\mu'^2+\sigma'^2)}\right\} \tag{2-28}$$

利用「Jensen不等式」(Jensen's inequality)〔註十三〕：

$$\mu'\equiv E\left[\frac{1}{e}\right]>\frac{1}{E[e]}=\frac{1}{\mu} \tag{2-29}$$

我們不難證明D恒爲正值〔註十四〕。換句話說，就風險中立的出口商而言，選取外幣報價所得的預期效用較國幣報價時爲高。Baron (1976a) 加了一個限制性的假定——邊際成本固定（即$\beta=0$），也得到相同的結論（頁432-435)。事實上，即使我們取消此一限制，而逕行沿用常見的邊際成本遞增（即$\beta>0$）的假定，則Baron的論證不但不減弱，反倒會增強。因爲從式(2-28)可知，隨著β的提高，D也越發增大（即$\partial D/\partial\beta>0$）〔註十五〕。這就是說，外幣報價優於國幣報價的程度，與邊際成本的斜率成正比。

然而，Baron似乎不太瞭解，他所以有「外幣報價較國幣報價爲佳」的結論，完全歸因於「風險中立」的假定，而與邊際成本固定或遞增絲毫不相關聯，我們依照他自己的假定，很容易求得下列的關係〔註十六〕：

$$\sigma_{\pi_1}=\frac{\sigma(a^2\mu^2-\alpha^2)}{4b\mu^2}>\sigma_{\pi_2}=\frac{\sigma'(a^2-\alpha^2\mu'^2)}{4b\mu'^2} \tag{2-30}$$

上列的不等式顯示：出口商如以外幣報價，其利潤波動的程度要比國幣報價者來得大。但因設定他是風險中立者——根本不在乎利潤如何的波動不定，只顧採行預期利潤水準較高的策略——故用外幣報價。倘若出口商也祛避風險，就可能爲減輕利潤的波動而改採另一種策略——以國幣報價。下面我們就來討論這種情形。

根據(2-20)、(2-26)兩式我們知道，就祛避風險的出口商來說，外幣報價與國幣報價的預期效用之差（D）可以寫如下式：

$$D=D(f;\cdots\cdots)\equiv \text{Max}\,E[U(\pi_1)]_{f>0}-\text{Max}\,E[U(\pi_2)]_{f>0}$$

$$= h(f, \mu, \sigma^2, a, b, \alpha, \beta)$$

$$- g(f, \mu', \sigma'^2, \alpha_3', \alpha_4', a, b, \alpha, \beta) \quad (2\text{-}31)$$

由(2-20)、(2-26)兩式可知，式(2-31)中不僅包括繁多的參數，係數的形式也相當複雜，實在無法直接從這個式子判定D究竟是正或負。因此，我們只得在簡化的假定下，先作一種原則性的探討。

假定$\beta = 0$，並取$f = 0$做爲分析的原先值(inital value)，再就式(2-31)對f偏微分，我們得到

$$\frac{\partial D}{\partial f} = \left(\frac{\partial \mu_{\pi_1}}{\partial p^*} - \frac{f}{2} \frac{\partial \sigma^2_{\pi_1}}{\partial p^*} \right) \frac{\partial p^*}{\partial f} - \left(\frac{\partial \mu_{\pi_2}}{\partial p} - \frac{f}{2} \frac{\partial \sigma^2_{\pi_2}}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial f}$$

$$- \frac{1}{2} (\sigma^2_{\pi_1} - \sigma^2_{\pi_2}) \quad (2\text{-}32)$$

但出口商極大化行爲的初階條件告訴我們

$$\frac{\partial \mu_{\pi_1}}{\partial p^*} - \frac{f}{2} \frac{\partial \sigma^2_{\pi_1}}{\partial p^*} = 0 \text{，} \frac{\partial \mu_{\pi_2}}{\partial p} - \frac{f}{2} \frac{\partial \sigma^2_{\pi_2}}{\partial p} = 0$$

因此

$$\frac{\partial D}{\partial f} = -\frac{1}{2} (\sigma^2_{\pi_1} - \sigma^2_{\pi_2}) < 0 \quad (2\text{-}33)$$

由上式可知，在既定的條件下，若f越大，D就越小。我們不妨據此推想：可能有某一f值，會使D由正轉負[註十七]。換句話說，如果其他的參數不變，則「相當」保守的出口商，爲了趨避利潤的風險，勢將放棄外幣報價而改用國幣報價。這正明白地顯示，風險祛避者不像風險中立者必定採用外幣報價，而是面臨「報價通貨選擇」的問題；並且，他的策略將隨着產品的供需條件(α，β，a，b)、滙率的預期水準及波動幅度(μ，μ' 及 σ^2，σ'^2)等參數的不同而改變。探討這些參數如何影響出口商的抉擇，正是本文尤其是下一章的重要課題。

第五節　結　　語

以上我們雖然想從式(2-31)研究外幣報價與國幣報價孰優孰劣的影響因素，並據以探索選擇報價通貨的準則，但因該式太過複雜，除非給予某些極端的假定，否則無法依此得到明確的結論。所以，我們只好退而求其次，對這個式子作了一些概括性的說明。在說明的過程中，我們指出，廠商的風險態度、產品的供給條件和需求情況、滙率的預期水準和波動幅度等參數，是出口商選擇報價通貨的決定因素。我們打算在下一章就式(2-31)設定參數的值，藉用計算機求解，俾能分析參數變動對於報價策略的影響，這樣也許可以補充本章說明的不足。

註　釋

〔註　一〕出口廠商的產品同時銷售國內外的情形，可參閱Hu (1975)。

〔註　二〕嚴格的說，式(2-2)是需求函數的反函數(inverse)〔 Hu (1975), 頁259 〕。但有些文獻〔例如Greenhut and Greenhut (1977,頁1872)〕就直接稱它做「需求函數」。

〔註　三〕在確定(certainty)的情況下，我們可以根據(2-1)及(2-2)兩式求得最適產量為 $q=(a\mu-\alpha)/2(\beta+b\mu)>0$ (因此我們假定 $a\mu>\alpha$)，這時的邊際成本(MC ，等於邊際收入)應是

$$MC=\frac{\mu(\alpha b+\beta a)}{(\beta+b\mu)}\geq 0$$

因為 $\beta+b\mu\geq 0$ ，故 $MC\geq 0$ 的條件是 $\beta\geq -\alpha b/a$ 。

〔註　四〕一般而言，生產兼出口的廠商比代理商較會遭受這種風險。這是因為前者不確定的期間通常較後者為長的緣故。詳見Goldstein (1978)及Baron (1978)。

〔註　五〕由於我們的模型只考慮滙率風險，而不像McKinnon (1979)及Kawai (1980)，除了滙率風險之外，還有商品價格變動的風險。

〔註　六〕假定 $U(\pi)$ 是可以三次微分的連續函數，而其為「有界的」，依Arrow (1971,頁92)的定義，即指 $\lim_{\pi\to 0} U(\pi)$ 及 $\lim_{\pi\to\infty} U(\pi)$ 存在且有限。

〔註　七〕von Neumann and Morgenstern (1947)效用理論據以成立的公理是：完全序列公理(Complete-ordering axiom)，連續性公理(Continuity axiom)，獨立性公理(Independence axiom)，不等機率公理(Unequal-probability axiom)，複合公理(Axiom of complexity)。Markowitz (1959,頁229-234)對於這些公理有詳盡的討論。

〔註　八〕這等於假定 $U(\pi)$ 是嚴格遞增的函數(strictly increasing function)〔 Arrow (1971),頁92〕。又，當 $U''(\pi)>0$ 時，U 應為嚴格凸性(strictly convex)。只是為了切乎實際，我們沒有討論這種情形。

〔註　九〕令 δ 代表風險貼水（ risk premium ），我們可由確定性等值的概念得知，出口商從 $\mu_\pi - \delta$ 得到的效用，跟他從 π 得到的預期效用，毫無差異〔 Pratt (1964)，頁 124-125 〕：

$$U(\mu_\pi - \delta) = E[U(\pi)] \tag{1}$$

換句話說，出口商追求 $E[U(\pi)]$ 之極大，卽等於追求 $U(\mu_\pi - \delta)$ 之極大，而後者又相當於追求 $\mu_\pi - \delta$ 之極大。因此，出口商以 $E[U(\pi)]$ 或以 $\mu_\pi - \delta$ 為標的函數（ objective function ），並沒有差別。

我們用泰勒數列（ Taylor's series ）分別就式(1)的左右兩邊在 μ_π 展開，並略去二次以上的動差，卽得

$$U(\mu_\pi - \delta) \doteq U(\mu_\pi) - \delta U'(\mu_\pi) \tag{1a}$$

$$E[U(\pi)] \doteq U(\mu_\pi) + \frac{1}{2}\sigma_\pi^2 U''(\mu_\pi) \tag{1b}$$

比較式(1a)及式(1b)，我們得到

$$\delta = \frac{1}{2} f \sigma_\pi^2 \text{，式中 } f \equiv -\frac{U''(\mu_\pi)}{U'(\mu_\pi)} > 0 \tag{2}$$

以式(2)代入式(1)，卽得出口商的標的函數如下：

$$E[U(\pi)] \propto \mu_\pi - \frac{f}{2}\sigma_\pi^2 \tag{3}$$

Day (1977) 及 Farrar (1967) 則利用效用函數的轉換〔見 Alchian (1953) 〕，直接將式(1b)寫成下列的形式：

$$E[U(\pi)] \doteq \mu_\pi - \frac{f'}{2}\sigma_\pi^2 \text{，式中 } f' = -U''(\mu_\pi) = fU'(\mu_\pi)$$

〔註　十〕現時文獻〔例如 Amihud (1980，頁685), Borch (1968，頁45), Christofides and Tapon (1979，頁719), Freund (1956，頁225), Grossman and Stiglitz (1980，頁395), Wihlborg (1978，頁48) 等等〕常以 Arrow (1965) 及 Pratt (1964) 發展出來的絕對風險袪避指標 $A(\pi) \equiv -U''(\pi)/U'(\pi)$，和相對的風險袪避指標 $R(\pi) = A(\pi)\pi$ 來測量決策者的風險態度。式(2-14)的 f 相當於在「固定絕對風險袪避」（ constant absolute risk aversion ）假定下的絕對風險袪避指標。由式(2)可知：$f = 2(\delta/\sigma_\pi^2)$，套 Pratt 的話來說，「$f$ 正是單位風險貼水（ δ/σ_π^2 ）的兩倍」〔(1964)，頁 125 〕。倘若我們已知 f 的值，則可利用這個關係推求風險貼水。

〔註十一〕$\hat{p}^*$ 是三次方程式 $a_3 p^{*3} + a_2 p^{*2} + a_1 p^* + a_0 = 0$ 之正實根。從極大化的二階條件：

$$g \equiv \frac{\partial^2 E[U(\pi_1)]}{\partial p^{*2}} = 3a_3 p^{*2} + 2a_2 p^* + a_1$$

$$= 3a_3\left(p^* + \frac{a_2}{3a_3}\right)^2 + \frac{3a_1 a_3 - a_2^2}{3a_3} < 0$$

我們知道 $3a_1a_3 - a_2^2 > 0$ 是滿足 $g < 0$ 的充分條件 。所以我們在分析中，假設

$$3a_1a_3 - a_2^2 > 0 \text{，亦即} \quad f < \frac{4(\mu + \beta / b)}{b a^2 \sigma^2}$$

據此，$t > 0$，且 $s^2 + 4t^3 > 0$。因而可由「Cardan 公式」判定上列的三次方程式只有一個實根。另外，我們利用「Descarte 符號法則」推知此方程式沒有負根 。由此可見，$\hat{p}^*$ 是它的惟一正實根。

〔註十二〕假定 $3a_1'a_3' - a_2'^2 > 0$，亦即

$$f < \frac{4b[\mu' + (\beta/b)(\mu'^2 + \sigma'^2)]\{[1+(\beta/b)(2\mu' + \alpha_3'\sigma')]^2 + (\alpha_4' - 1 - \alpha_3'^2)(\beta/b)^2\sigma'^2\}}{\sigma'^2[\alpha + 2a(\beta/b)]^2\{[1+(\beta/b)(2\mu' + \alpha_3'\sigma')]^2 - 2(\alpha_4' - 1 - \alpha_3'^2)(\beta/b)^2\sigma'^2\}}$$

則可滿足極大化的二階條件：$\partial^2 E[U(\pi_2)] / \partial p^2 \equiv g' = 3a_3'p^2 + 2a_2'p + a_1' < 0$，從而推知 $\hat{p}$ 是三次方程式 $a_3'p^3 + a_2'p^2 + a_1'p + a_0' = 0$ 的惟一正實根。

〔註十三〕根據「Jensen 不等式」可知：若 g 是凸性函數（convex function），則 $E[g(e)] \geq g(E[e])$。此處 $g(e) = 1/e$，$g' < 0$，$g'' > 0$，故得 $E[1/e] > 1/E[e] = 1/\mu$。

〔註十四〕利用 $\mu' > 1/\mu$ 的關係，我們可就下列三種情況，證明D恆為正值。

(一)當 $\beta = 0$ 時，則

$$D > \frac{1}{4b}\left[\frac{(\mu a - \alpha)^2}{\mu} - \frac{(a - \alpha\mu')^2}{1/\mu}\right]$$

$$> \frac{1}{4b}\left[\frac{(\mu a - \alpha)^2}{\mu} - \mu\left(a - \frac{\alpha}{\mu}\right)^2\right] = 0 \tag{2-28a}$$

(二)當 $\beta > 0$ 時，則

$$D > \frac{1}{4b}\left[\frac{(\mu a - \alpha)^2}{\mu + \beta/b} - \frac{\mu^2(a - \alpha\mu')^2}{\mu + \beta/b}\right] + \frac{(\beta/b)a\sigma'^2[\alpha + a(\beta/b)]}{b[\mu' + (\beta/b)(\mu'^2 + \sigma'^2)]}$$

$$= \text{正數} + \frac{(\beta/b)a\sigma'^2[\alpha + a(\beta/b)]}{b[\mu' + (\beta/b)(\mu'^2 + \sigma'^2)]} > 0 \tag{2-28b}$$

(三)當 $\beta < 0$ 時，令 $\beta = -\alpha b / a$（即 β 的下限），則

$$D = \frac{1}{4b}\left[a(\mu a - \alpha) - \frac{a(a - \alpha\mu')^2}{\mu'(a - \alpha\mu') - \alpha\sigma'^2}\right] > 0 \tag{2-28c}$$

且 $\partial D / \partial \beta > 0$。

〔註十五〕雖然就式(2-28)對 β 偏微分即得此一結果，但直接從式(2-28b)來判斷，可能更清楚。

〔註十六〕$\sigma_{\pi_1} - \sigma_{\pi_2} = \frac{1}{4b}\left[\frac{\sigma}{\mu^2}(a^2\mu^2 - \alpha^2) - \frac{\sigma'}{\mu'^2}(a^2 - \alpha^2\mu'^2)\right]$

$$= \frac{1}{4b}\left[\frac{\sigma}{\mu^2}(a^2\mu^2 - \alpha^2) - \sigma'\left(\frac{a}{\mu'}\right)^2 + \sigma'\alpha^2\right] > \frac{1}{4b}\left[\frac{\sigma}{\mu^2}(a^2\mu^2 - \alpha^2)\right.$$

$$-\sigma'(a^2\mu^2-\alpha^2))$$

$$=\frac{1}{4b}(a^2\mu^2-\alpha^2)(\frac{\sigma}{\mu^2}-\sigma')$$

因為$\tilde{p}^*=(\mu a+\alpha)/2\mu$，$q=a/b-(1/b)\tilde{p}^*=(a\mu-\alpha)/2b\mu$必須是正的，因此我們知道$a\mu>\alpha$。又，$1/e$在$1/\mu$點附近的泰勒展開式有如下列的形式：

$$\frac{1}{e}=\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu^2}(e-\mu)+\frac{1}{\mu^3}(e-\mu)^2+\cdots\cdots$$

對上式取期望值，並利用$E[e-\mu]=0$及$E[(e-\mu)^2]=\sigma^2$的關係，我們得到

$$E[\frac{1}{e}]\doteq\frac{1}{\mu}+\frac{\sigma^2}{\mu^3}$$

同理，我們求得

$$E[\frac{1}{e^2}]\doteq\frac{1}{\mu^2}+\frac{3\sigma^2}{\mu^4}$$

根據以上兩式可知

$$\sigma'^2\equiv\mathrm{Var}(\frac{1}{e})=E[\frac{1}{e^2}]-(E[\frac{1}{e}])^2\doteq\frac{\sigma^2}{\mu^4}-\frac{\sigma^4}{\mu^6}$$

由此可見$\sigma'<\sigma/\mu^2$，所以$\sigma_{\pi_1}-\sigma_{\pi_2}>0$，亦卽$\sigma_{\pi_1}>\sigma_{\pi_2}$。

〔註十七〕值得注意的是，能使D由正轉負的f值須為有限值，並滿足極大化的二階條件。